MINISTERIO DEL AIRE

SUBSECRETARIA DE AVIACION CIVIL

SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL

Publicaciones
Serie A (Memorias) núm. 19 (2.ª edición)

LA DINÁMICA APARENTE DE LA METEOROLOGÍA SINÓPTICA

Por

JOSE M.ª JANSA GUARDIOLA

Meteorólogo

Doctor en Ciencias Físicas

Depósito Legal: M.-10406.-1966

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA
(CIUDAD UNIVERSITARIA)
MADRID-3-1966

MINISTERIO DEL AIRE

SUBSECRETARIA DE AVIACION CIVIL

SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL

Publicaciones
Serie A (Memorias) núm. 19 (2.ª edición)

LA DINÁMICA APARENTE DE LA METEOROLOGÍA SINÓPTICA

Por

JOSE M.ª JANSA GUARDIOLA

Meteorólogo

Doctor en Ciencias Físicas

Depósito Legal: M.-10406.-1966

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA
(CIUDAD UNIVERSITARIA)
MADRID-3-1966

GRÁFICAS VIRGEN DE LORETO

MINISTERIO DEL AIRE
SUBSECRETARIA DE AVIACION CIVIL

SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL

Publicaciones
Serie A (Memorias) núm. 19 (2.ª edición)

LA DINÁMICA APARENTE DE LA METEOROLOGÍA SINÓPTICA

Por
JOSE M.ª JANSA GUARDIOLA
Meteorólogo
Doctor en Ciencias Físicas

Depósito Legal: M.-10406.-1966

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA
(CIUDAD UNIVERSITARIA)
MADRID-3-1966

GRÁFICAS VIRGEN DE LORETO

LA DINAMICA APARENTE
DE LA
METEOROLOGIA SINOPTICA

I. APELACION A LA REPRESENTACION CONFORME

Si las cartas meteorológicas fuesen esféricas, el movimiento de sus puntos representativos obedecería a las leyes de la Dinámica; pero dichas cartas son planas y en ellas se usan distintos sistemas de representación, y entonces si un punto material efectúa un movimiento real sobre la Tierra, que, naturalmente, estará sometido a tales leyes, su punto representativo sobre la carta no podrá en manera alguna obedecerlas; es decir, en Meteorología sinóptica no pueden aplicarse, estrictamente hablando, las leyes de la Dinámica. Estas leyes sufren una deformación al pasar de la realidad a la imagen, de la misma manera como la sufren también las formas de los accidentes geográficos. Nuestro objeto es hoy estudiar esta deformación y formular en cierta manera las leyes de la Dinámica aparente, valederas para la Meteorología sinóptica. Estas leyes teóricamente se desvían poco de las leyes verdaderas, y en la práctica apenas si se puede notar alguna diferencia. Es claro que la deformación será distinta para cada sistema de representación. Además, es siempre posible restablecer la vigencia perfecta de las leyes de la Dinámica introduciendo fuerzas ficticias, dependientes del sistema de representación, que justifiquen las citadas desviaciones, procedimiento muy corriente en Mecánica racional y que resulta siempre de considerable comodidad.

Por vía de introducción estudiaremos la transformación del movimiento plano de un punto material cuando la red cartesiana a la cual está referido se sustituye por una imagen de la misma obtenida por representación conforme. Nos conviene que la función $w = \alpha + i\beta$; $z = x + iy$, que nos permite pasar del plano imagen, y su inversa sean uniformes para evitar confusiones y complicaciones. Son de esta clase, por ejemplo, la función $w = kz$ (k real), que representa una semejanza, y la función $w = k : z$, que representa una inversión (combinada con una simetría), y en general la función bilineal $w = \dfrac{mz + n}{pz + s}$, que representa una homografía. En la inversión, la sencilla ley de inercia, piedra angular de la Dinámica, ya no se conserva, pues la transformada de una línea recta, en general, es una circunferencia, y a segmentos iguales del plano objeto corresponden arcos desiguales en su imagen; es decir, que el movimiento imagen de un movimiento rectilíneo y uniforme no es ni uniforme ni rectilíneo.

Como por hipótesis el tiempo y la masa se conservan en la representación, resulta que todas las alteraciones que puede sufrir la Dinámica proceden de la Geometría. Ahora bien: toda la métrica está vinculada a la definición del elemento de distancia *ds,* que en Geometría euclidiana y coordenadas cartesianas rectangulares tienen la forma: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Como la representación conforme es continua, a dos puntos infinitamente próximos del plano imagen. La distancia entre éstos viene dada por la forma cuadrática

$$dS^2 = \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2\right] dy^2 +$$
$$+ 2\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right] dx \, . \, dy \, .$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Cauchy,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = - \frac{\partial \beta}{\partial x},$$

el término rectangular se anula y los dos coeficientes restantes se igualan, resultando

$$dS^2 = \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right](dx^2 + dy^2) =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2\right](dx^2 + dy^2) \qquad [1]$$

La expresión

$$\delta = \frac{dS}{ds} = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2} \qquad [2]$$

representa la razón de semejanza en el entorno de los puntos correspondientes x, y y α, β, que llamaremos dilatación en el punto α, β. Como se ve, es independiente de la dirección del elemento lineal, y sólo depende de las coordenadas del punto objeto (o de las del punto imagen si se prefiere), en lo cual consiste precisamente la semejanza infinitesimal o conformidad, pues es evidente que la imagen de una pequeña figura del plano objeto es otra figura semejante, dilatada en la razón δ. Es claro que δ puede ser mayor o menor que la unidad, resultando en este último caso una contracción en vez de una dilatación. Además de la dilatación, la transformación conforme introduce también una rotación, fácil de calcular, que de momento no nos interesa.

Ahora bien: si introducimos coordenadas curvilíneas, tomando como primer haz las curvas transformadas de las paralelas al eje de las x y como segundo haz el de las paralelas al eje de las y, las coordenadas curvilíneas de un punto cualquiera del plano imagen serán idénticas a las coordenadas cartesianas de su correspondiente del plano objeto. Es, pues, cómodo utilizar para el plano imagen un sistema de geometría no euclidiano caracterizado por la forma (1) del elemento lineal. Para la inversión tenemos, por ejemplo:

$$\delta = \frac{k^2}{r^2},$$

siendo $r^2 = x^2 + y^2$, y representando por k^2 la potencia.

Si en cada punto del plano imagen tomamos un segmento proporcional a δ por unidad de longitud y escribimos

$$\frac{d\,S}{\delta} = d\,S,$$

la ecuación (1) se reduce a

$$d\,S^2 = d\,x^2 + d\,y^2, \qquad [3]$$

y habremos pasado a una geometría seudoeuclidiana, en el sentido de que las fórmulas analíticas diferenciales serán formalmente idénticas a las de ésta, aunque para las integrales habrá que tener en cuenta que la unidad de medida no será una constante para todo el plano, sino función de las coordenadas mismas. La ecuación de una curva del plano imagen en coordenadas curvilíneas será idéntica a la de su correspondiente del plano objeto en coordenadas cartesianas. En particular, las curvas que satisfacen a una ecuación lineal de la forma

$$y = a\,x + b$$

podrán llamarse geodésicas, porque con la definición de distancia implicada en la ecuación (3) gozan de la propiedad de mínimo. Tendrán por ecuación en coordenadas cartesianas:

$$y\,(\alpha, \beta) = a\,.\,x\,(\alpha, \beta) + b.$$

Por ejemplo, en el caso de la inversión, la ecuación cartesiana de una geodésica del plano imagen será:

$$b\,(\alpha^2 + \beta^2) + k^2\,a\,\alpha + k^2\,\beta = 0;$$

o sea, una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y tiene por radio

$$\rho = k^2 \frac{\sqrt{a^2+1}}{2\,b}.$$

Si llamamos φ al ángulo que la recta forma con el eje de las x, será:

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

y por tanto,

$$2\,\rho = \frac{k^2}{b\cos\varphi};$$

y como $b\cos\varphi$ es la distancia de la recta al origen de coordenadas, se ve que el diámetro de la circunferencia imagen de una recta es el segmento inverso de la distancia de la misma recta al origen; cosa fácil de probar geométricamente.

La seudodistancia entre dos puntos A y B valdrá:

$$\int_A^B \underline{d\,S} = \int_A^B \frac{d\,S}{\delta}.$$

La integración debe efectuarse a lo largo de la geodésica que pasa por A y B. Dicha seudodistancia es, naturalmente, idéntica a la distancia en sentido euclidiano entre los puntos correspondientes del plano objeto.

En resumen: todas las magnitudes del plano objeto pueden evaluarse de tres modos distintos: en coordenadas cartesianas α, β; en coordenadas curvilíneas x, y y unidad natural, y en coordenadas curvilíneas y unidad variable δ; a éstos les llamamos *seudovalores*. En el primer caso vale la Geometría euclidiana ordinaria; en el segundo, vale un sistema no euclidiano, y en el tercero, el sistema seudoeuclidiano.

Las aplicaciones a la Mecánica son ahora muy fáciles. Si v es la velocidad de un punto en el plano objeto, la velocidad de su punto representativo en el plano imagen tendrá por componentes:

$$\begin{aligned} V_\alpha &= \frac{d\,\alpha}{d\,t} = \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\frac{d\,x}{d\,t} + \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,y}\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\,v_x + \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,y}\,v_y \\ V_\beta &= \frac{d\,\beta}{d\,t} = \frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}\,v_x + \frac{\partial\,\beta}{\partial\,y}\,v_y\,, \end{aligned} \qquad [4]$$

y su valor absoluto será:

$$V^2 = \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\right)^2 v_x^2 + \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,y}\right)^2 v_y^2 + 2\,\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\cdot\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,y}\,v_x\,v_y + \left(\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}\right)^2 v_x^2 + \\ + \left(\frac{\partial\,\beta}{\partial\,y}\right)^2 v_y^2 + 2\,\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}\cdot\frac{\partial\,\beta}{\partial\,y}\,v_x\,v_y\,,$$

que, teniendo en cuenta una vez más las relaciones de Cauchy, se reduce, naturalmente, a

$$| V | = \delta \, . \, | v | \, . \qquad [5]$$

El mismo resultado se habría podido obtener directamente escribiendo

$$| V | = \frac{d\,S}{d\,t} = \frac{\delta \, . \, d\,s}{d\,t} = \delta \, . \, | v | \, .$$

La seudovelocidad será idéntica a la velocidad del punto objeto en su plano, efectivamente:

$$\underline{V} = \frac{d\,S}{d\,t} = \frac{d\,s}{d\,t} = v \, . \qquad [6]$$

Las ecuaciones (4) están referidas a coordenadas curvilíneas x, y. Para pasar a coordenadas cartesianas u, v partiremos de las identidades

$$d\,x = \frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\,d\,\alpha + \frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\,d\,\beta$$

$$d\,y = \frac{\partial\,y}{\partial\,\alpha}\,d\,\alpha + \frac{\partial\,y}{\partial\,\beta}\,d\,\beta \, .$$

Resolviendo con relación a $d\alpha$, $d\beta$,

$$d\,\alpha = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\,y}{\partial\,\beta}\,d\,x - \frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\,d\,y\right)$$

$$d\,\beta = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\,d\,y - \frac{\partial\,y}{\partial\,\alpha}\,d\,x\right);$$

siendo

$$\Delta = \frac{D\,(x\,,\,y)}{D\,(\alpha\,,\,\beta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\,x}{\partial\,\alpha} & \dfrac{\partial\,x}{\partial\,\beta} \\[2ex] \dfrac{\partial\,y}{\partial\,\alpha} & \dfrac{\partial\,y}{\partial\,\beta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta^2} \, .$$

Como, por otra parte,

$$d\,\alpha = \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\,d\,x + \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,y}\,d\,y$$

$$d\,\beta = \frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}\,d\,x + \frac{\partial\,\beta}{\partial\,y}\,d\,y \, ,$$

se deduce:

$$\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x} = \frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\beta} = \delta^2\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\beta}$$

$$\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,y} = -\,\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta} = -\,\delta^2\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}$$

$$\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x} = -\,\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\alpha} = -\,\delta^2\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\alpha}$$

$$\frac{\partial\,\beta}{\partial\,y} = \frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha} = \delta^2\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\,.$$

Llevando estos valores a (4), se obtendrá:

$$\begin{aligned} V_u &= \frac{1}{\Delta}\left[v_x\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\beta} - v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\right] = \delta^2\left[v_x\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\beta} - v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\right] = \\ &= \delta^2\left[v_x\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha} - v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\right] \\ V_v &= \frac{1}{\Delta}\left[-\,v_x\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\alpha} + v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\right] = \delta^2\left[-\,v_x\,\frac{\partial\,y}{\partial\,\alpha} + v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\right] = \\ &= \delta^2\left[-\,v_x\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta} + v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\right]. \end{aligned} \tag{4'}$$

Derivando (4) o (4′) con relación a *t*, obtendremos la aceleración

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{\partial^2\,\alpha}{\partial\,x^2}\,v_x^2 + \frac{\partial^2\,\alpha}{\partial\,y^2}\,v_y^2 + 2\,\frac{\partial^2\,\alpha}{\partial\,x\,\partial\,y}\,v_x\,v_y + \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\,a_x + \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,y}\,a_y\right) \\ A_\beta &= \frac{\partial^2\,\beta}{\partial\,x^2}\,v_x^2 + \frac{\partial^2\,\beta}{\partial\,y^2}\,v_y^2 + 2\,\frac{\partial^2\,\beta}{\partial\,x\,\partial\,y}\,v_x\,v_y + \left(\frac{\partial\,\beta}{\partial\,x}\,a_x + \frac{\partial\,\beta}{\partial\,y}\,a_y\right); \end{aligned} \tag{7}$$

o bien:

$$\begin{aligned} A_\alpha = &-2\,\delta^6\left[\left(v_\beta\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha} - v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\right)^2\left(\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\,\frac{\partial^2\,x}{\partial\,\alpha^2} + \frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\,\frac{\partial^2\,x}{\partial\,\alpha\,\partial\,\beta}\right) + \right. \\ &\left. + \left(v_x\,\frac{\partial x}{\partial\,\alpha} - v_y\,\frac{\partial x}{\partial\,\beta}\right)\cdot\left(v_x\,\frac{\partial x}{\partial\,\beta} + v_y\,\frac{\partial x}{\partial\,\alpha}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\,\alpha}\,\frac{\partial^2\,x}{\partial\,\alpha\,\partial\,\beta} + \frac{\partial x}{\partial\,\beta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\,\beta^2}\right)\right] + \\ &+ \delta^4\left[\left(v_x\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha} - v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\right)\left(v_x\,\frac{\partial^2 x}{\partial\,\alpha^2} - v_y\,\frac{\partial^2\,x}{\partial\,\alpha\,\partial\,\beta}\right) + \right. \\ &\left. + \left(v_x\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta} + v_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha}\right)\left(v_x\,\frac{\partial^2\,x}{\partial\,\alpha\,\partial\,\beta} - v_y\,\frac{\partial^2\,x}{\partial\,\beta^2}\right)\right] + \delta^2\left[a_x\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\alpha} - a_y\,\frac{\partial\,x}{\partial\,\beta}\right] \end{aligned}$$

$$A_v = -2\,\delta^6 \left[\left(v_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} - v_y \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + v_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \beta} v_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \right) \right] +$$

$$+ \delta^4 \left[\left(v_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} - v_y \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) \left(v_x \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + v_y \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + v_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \left(v_x \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + v_y \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} \right) \right] + \delta^2 \left[a_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + a_y \frac{\partial x}{\partial \nu} \right]. \quad [7']$$

De ellas resulta inmediatamente que aunque el movimiento del punto objeto no sea acelerado, el del punto imagen lo será. La ley de inercia sufrirá una modificación, que vamos a hallar. Sabemos que la transformada de una línea recta es una geodésica; por de pronto, podemos, pues, decir que la trayectoria de inercia en el plano imagen es una geodésica, o sea, que todo punto no sometido a fuerzas exteriores describe una geodésica. Calculemos separadamente las componentes tangencial y transversal de la aceleración. Podrían deducirse de las ecuaciones (7), suprimiendo el último término, que es el único que depende de la aceleración real; pero nos parece mejor proceder del siguiente modo. Usamos el subíndice i (inicial de inercia) para indicar que no hay aceleración real. Para la componente tangencial observaremos que si la velocidad en el punto α, β es V, en el punto $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta$ será $V + dV$, que, teniendo en cuenta (5) y considerando que por hipótesis v es constante, nos da:

$$(A_i)_t = \frac{dV}{dt} = v \frac{dS}{dt} = v \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \delta}{\partial y} v_y \right). \quad [8]$$

Según (2),

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right);$$

de donde

$$(A_i)_t = \frac{v}{\delta} \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} \right) v_x + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right) v_y \right]. \quad [8']$$

La aceleración transversal valdrá:

$$(A_i)_r = \frac{V^2}{R}, \quad [9]$$

siendo R el radio de curvatura de la trayectoria.

Para poder expresar este resultado en función de las coordenadas x, y, necesitamos considerar el segundo elemento característico de la representación conforme, o sea, el giro local. Antes hemos dicho que al pasar del plano objeto al plano imagen todo elemento lineal, no sólo experimenta una dilatación δ, sino también un giro. Si lo llamamos θ, tendremos, evidentemente:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\dfrac{d\beta}{d\alpha} - \dfrac{dy}{dx}}{1 + \dfrac{d\beta}{d\alpha} \cdot \dfrac{dy}{dx}} = \frac{d\beta \,.\, dx - d\alpha \,.\, dy}{d\alpha \,.\, dx + d\beta \,.\, dy} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial\beta}{\partial x} dx^2 + \left(\dfrac{\partial\beta}{\partial y} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right) dx \,.\, dy - \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} dy^2}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} dx^2 + \left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right) dx \,.\, dy + \dfrac{\partial\beta}{\partial y} dy^2}$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones de Cauchy:

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}(dy^2 + dx^2)}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(\partial y^2 + dx^2)} = -\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial y}{\partial\beta}} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}} = \gamma, \qquad [10]$$

que sólo depende, lo mismo que la dilatación, de las coordenadas del punto. El ángulo de contingencia a lo largo de una geodésica se obtendrá diferenciando el giro θ, puesto que la geodésica del plano objeto es una línea recta. Por consiguiente,

$$R = \frac{dS}{d\theta} = \frac{\delta\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial x} dx + \dfrac{\partial\theta}{\partial y} dy} = \frac{(1+\gamma^2)\,.\,\delta\,.\sqrt{dx^2+dy^2}}{\overset{1}{\gamma}_x\, dx + \overset{1}{\gamma}_y \,.\, dy} =$$

$$= \frac{-\delta\,(1+\gamma^2)\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\overset{1}{\gamma}_x + \overset{1}{\gamma}_y \dfrac{dy}{dx}};$$

siendo

$$\overset{1}{\gamma}_x = \left(\gamma\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}\right) : \frac{\partial\alpha}{\partial x}$$

$$\overset{1}{\gamma}_y = \left(\gamma\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right) : \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Renunciamos a expresar estos resultados en coordenadas α, β por su escasa utilidad en este caso.

Para la inversión, un cálculo algo penoso, aunque sencillo, conduce al resultado ya conocido:

$$R = \frac{k^2}{2 \cos \varphi},$$

que demuestra que la trayectoria de inercia es en este caso una circunferencia.

La aceleración total valdrá:

$$A_i = \sqrt{(A_i)_t^2 + (A_i)_r^2}\ .$$

Atribuyendo al punto imagen la masa del punto objeto, que llamaremos m, la fuerza aparente introducida por la representación valdrá:

$$I = m\ .\ A_i\ .$$

Esta fuerza no es normal a la trayectoria, y, por consiguiente, habrá variación de la energía cinética; es decir: para la Dinámica aparente del punto imagen no vale el principio de la conservación de la energía, sino que para entretener el movimiento *espontáneo* (libre de acciones físicas) de un punto, hace falta comunicarle o sustraerle energía (aparente, naturalmente). Teniendo en cuenta que la trayectoria es una geodésica, podemos suponer, sin restringir la generalidad, que coincide con una línea coordenada; por ejemplo, con $y = o$. Entonces será $v_x = v$, $v_y = o$; y de las ecuaciones (7) (en las que deberá ponerse al mismo tiempo $a_x = a_y = o$) se deducen los siguientes valores para las componentes cartesianas de la fuerza:

$$I_\alpha = -2\, m\, \delta^6 v^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \right) \right] + m\, \delta^4 v^2 \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} \right]$$

$$I_v = -2\, m\, \delta^6 v^2 \left[\frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \right) \right] + m\, \delta_4 v^2 \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial^2 \beta} \right[.$$

Si esta fuerza derivase de un potencial, podría introducirse una energía potencial ficticia, cuyas variaciones compensasen los incrementos de energía cinética, restableciendo formalmente la validez del principio de la energía; pero no es así. En efecto, poniendo

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \right) = F(\alpha, \beta)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = G(\alpha, \beta),$$

las anteriores ecuaciones tomarán la forma

$$I_\alpha = 2\, m\, v^2\, \delta^6 \,.\, F(\alpha, \beta) + m\, v^2\, \delta^4 \,.\, G(\alpha, \beta)$$

$$I_\beta = 2\, m\, v^2\, \delta^6 \,.\, F(\beta, \alpha) + m\, v^2\, \delta^4 \,.\, G(\beta, \alpha).$$

Para que se cumpla la condición

$$\frac{\partial\, I_\alpha}{\partial\, \beta} = \frac{\partial\, I_\beta}{\partial\, \alpha},$$

deberá verificarse:

$$F\,)\alpha, \beta)\, \frac{\partial\, \delta}{\partial\, \beta} = F(\beta, \alpha)\, \frac{\partial\, \delta}{\partial\, \alpha}$$

$$G(\alpha, \beta)\, \frac{\partial\, \delta}{\partial\, \beta} = G(\beta, \alpha)\, \frac{\partial\, \delta}{\partial\, \alpha} \qquad [11]$$

$$\frac{\partial\, F(\alpha, \beta)}{\partial\, \beta} = \frac{\partial\, F(\beta, \alpha)}{\partial\, \alpha}$$

$$\frac{\partial\, G(\alpha, \beta)}{\partial\, \beta} = \frac{\partial\, G(\beta, \alpha)}{\partial\, \alpha};$$

o sea:

$$\frac{F(\alpha, \beta)}{F(\beta, \alpha)} = \frac{G(\alpha, \beta)}{G(\beta.\, \alpha)}$$

$$\frac{\partial\, F(\alpha, \beta)}{\partial\, \beta} = \frac{\partial\, F(\beta, \alpha)}{\partial\, \alpha}$$

$$\frac{\partial\, G(\alpha, \beta)}{\partial\, \beta} = \frac{\partial\, G(\beta, \alpha)}{\partial\, \alpha};$$

condiciones que evidentemente no se cumplen en general. Será suficiente (aunque no necesario) para que se cumpla la primera, que F y G sean funciones simétricas.

Siempre que estas condiciones se cumplan, la ley de inercia aparente tomará una forma particularmente sencilla, a saber: *la imagen de un punto material sobre el cual no actúa ninguna fuerza exterior, se mueve como si se encontrase en un campo de fuerza derivado de un potencial que depende de la velocidad real y de los parámetros característicos de la representación.* Es fácil comprobar que en el caso de la inversión no hay potencial. En general, sólo podrá decirse: *la imagen de un punto material sobre el cual no actúa ninguna fuerza exterior, se mueve como si se encontrase en un campo de fuerzas que dependen de la velocidad inicial y de los parámetros característicos de la representación.*

Volviendo a las ecuaciones (7), observamos que la aceleración total en la imagen de un movimiento cualquiera se compone, obedeciendo a la ley del paralelogramo, de la aceleración ficticia, proporcional al término inercial, y de la aceleración transformada, la cual resulta aplicando a la aceleración real las mismas fórmulas válidas para la velocidad. La ley fundamental de la Dinámica tomará, pues, la siguiente forma: *la imagen de un punto material sometido a fuerzas exteriores se mueve como si estuviese sometida a la acción de dos fuerzas simultáneas, a saber: una fuerza inercial dependiente tan sólo de la velocidad y de los parámetros característicos de la representación, y la fuerza transformada, que depende de la fuerza real y de dichos parámetros.*

Las fórmulas (4) o (4′) pueden considerarse como las fórmulas generales de transformación de vectores en el paso del plano objeto al plano imagen; bien entendido que no debe confundirse la *fuerza aparente* (eficaz en el plano imagen) con la *fuerza transformada,* pues, de acuerdo con el enunciado precedente, para componer aquélla debe agregarse a ésta el término inercial.

De las ecuaciones (4′) se deduce que el valor absoluto del vector cuando se pasa del plano-objeto al plano-imagen, queda simplemente multiplicado por el factor de dilatación δ.

Además, si llamamos ω al ángulo que el vector-objeto forma con su eje de abscisas y Ω el que el vector-imagen forma con el suyo, y suponemos estos ejes de abscisas coincidentes, resulta de las mismas ecuaciones (4′), teniendo en cuenta la (9):

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{V\beta}{V\alpha} = \operatorname{tg}(\theta + \omega);$$

es decir,

$$\Omega - \omega = \theta,$$

que demuestra que el ángulo formado por el vector transformado con el primitivo es igual al ángulo de giro de la representación. En resumen: la sencilla regla de transformación de vectores es la siguiente: *el vector-imagen de un vector dado es la imagen de dicho vector en la representación considerada, suponiendo que dilatación y giro fuesen constantes en un entorno suficientemente grande del punto de aplicación para que la imagen de un segmento rectilíneo pueda confundirse con un segmento rectilíneo.*

Como se ve, el procedimiento es parecido al que se sigue cuando se quiere referir el movimiento a un sistema de coordenadas acelerado con relación a un sistema inercial; por ejemplo, a un cuerpo sólido en rotación uniforme. A la fuerza real hay que añadir entonces la fuerza centrífuga y la de Coriolis, que son ficticias, para restablecer la validez del principio fundamental de la Dinámica. La fuerza real no debe sufrir en este caso ninguna transformación previa, porque en Mecánica ordinaria los vectores se conservan aunque se cambie de sistema de referencia.

II. LA ECUACION SINOPTICA FUNDAMENTAL

Las fuerzas que se toman en consideración en la Dinámica atmosférica, sin distinguir las reales de las ficticias, son: el gradiente de presión, la fuerza centrífuga, la de Coriolis y el rozamiento. A cada una de ellas se le puede aplicar la transformación anterior, y, por tanto, las ecuaciones generales conservarán su forma ordinaria sin más que sustituir cada fuerza por su transformada y añadir el término inercial. Pongamos:

a = aceleración real.	A = aceleración-imagen.
g = gradiente de presión.	G = gradiente transformado.
c = fuerza centrífuga.	C = fuerza centrífuga ídem.
l = fuerza Coriolis.	L = fuerza de Coriolis ídem.
r = rozamiento real.	R = rozamiento ídem.
ρ = densidad real.	I = término inercial.

A la ecuación fundamental de la Meteorología dinámica

$$\rho a = \rho g + c + l + r$$

corresponderá la ecuación

$$\rho A = \rho G + C + L + R + I, \qquad [12]$$

fundamental para la Meteorología sinóptica. Multiplicando la primera por la dilatación δ y haciendo girar el sistema de referencia un ángulo $-\theta$, la primera se podrá escribir así:

$$\rho a . \delta = \rho G + C + L + R,$$

con lo cual se ve claro que las dos ecuaciones no son equivalentes, a causa de la presencia del término I. En el caso particular que la transformación utilizada sea una semejanza, el término inercial desaparece, y entonces la ecuación sinóptica coincide con la dinámica.

En los párrafos anteriores hemos considerado la imagen plana de un movimiento plano. Como la Tierra no es plana, los resultados obtenidos no pueden aplicarse directamente a las cartas meteorológicas. La red de coordenadas curvilíneas de que nos hemos servido, que resultan de la transformación de la red cartesiana, no pueden representar una superficie esférica, porque sobre la superficie esférica es imposible una red cartesiana. Una superficie provista de coordenadas curvilíneas, aunque *en sí* puede ser plana, la consideraremos como curva; es decir, identificaremos los conceptos de superficie curva con espacio de dos dimensiones no euclidiano. Entonces la condición para que una superficie pueda representarse conformemente sobre otra, es que la razón de los radios de curvatura de Gauss en cada par de puntos correspondientes sea igual a la dilatación en los mismos. En efecto: la definición intrínseca de la curvatura de Gauss (o de su inversa, el radio de curvatura) se funda en el concepto de traslación paralela de un vector a lo largo de una curva. Se dice que la traslación de un vector infinitamente pequeño es paralela cuando se mantiene constante el ángulo que forma con la curva descrita por su punto de aplicación. Consideremos, por ejemplo, un pequeño triángulo geodésico ABC y calculemos el ángulo que habrá girado el vector cuando vuelva al punto de partida después de recorrer todo el contorno; se encuentra, prescindiendo de 2π, o sea de un giro completo:

$$\omega = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Por otra parte, una conocida fórmula de Geometría esférica, generalizada por Gauss a una superficie cualquiera, nos da:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\sigma}{r^2},$$

donde σ representa el área del triángulo y r el radio de curvatura de Gauss. De donde resulta:

$$\frac{\sigma}{r^2} = -\,\omega;$$

o sea:

$$r = \sqrt{-\frac{\sigma}{\omega}}.$$

Esta fórmula es válida para un recinto de forma cualquiera, como es fácil demostrar descomponiendo en triángulos.

Suponiendo el recinto infinitamente pequeño, podrá escribirse:

$$r = \sqrt{-\frac{d\sigma}{d\omega}},$$

cuya analogía con la fórmula que da el radio de curvatura de una curva salta a la vista.

Ahora bien: conservando las anotaciones que acabamos de usar para el espacio objeto, y designando con letras mayúsculas los elementos correspondientes del espacio imagen, se tendrá, análogamente:

$$R = \sqrt{-\frac{d\Sigma}{d\Omega}}.$$

Entre los elementos de área correspondientes $d\sigma$ y $d\Sigma$, si seguimos llamando δ a la dilatación, existe la relación

$$d\,\Sigma = \delta^2 \quad d\,\sigma ,$$

y teniendo en cuenta que por ser conforme la representación

$$d\,\Omega = d\,\omega ,$$

obtendremos

$$\frac{R}{r} = \delta ,$$

como nos habíamos propuesto.

Por ejemplo, en la proyección estereográfica, la dilatación en un punto de distancia polar x (medida sobre la carta) vale

$$\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2\,r}\right), \tag{13}$$

siendo s la distancia polar media sobre la superficie esférica y r el radio de la misma. Por tanto,

$$R = \frac{r}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2\,r}\right) = \frac{r}{2 \cos^2 \dfrac{s}{2\,r}}, \tag{14}$$

es decir: la proyección estereográfica equivale a la representación sobre una superficie cíclica de revolución de tipo parabólico, o, mejor dicho, la Geometría (no euclidiana) estereográfica es la Geometría de las figuras contenidas en la citada superficie. De aquí se deduce que una figura plana que sea representación conforme de otra figura plana, no puede serlo al mismo tiempo de una figura esférica. Un sistema de Geometría adecuado para describir las figuras obtenidas por proyección estereográfica o por cualquier otro procedimiento de representación conforme plana de la superficie esférica, no se puede presentar por ningún artificio como sistema seudoeuclidiano, mientras que esto se consigue fácilmente con el sistema de Geometría apto para describir las figuras obtenidas por representación conforme de un plano sobre otro. El mismo artificio, aplicado a la representación estereográfica, conduciría a una Geometría seudoesférica en vez de seudoeuclidiana.

III. LA PROYECCION ESTEREOGRAFICA

Una importante representación conforme de la superficie esférica sobre un plano, que se usa en Cartografía, es la proyección estereográfica, que, como se sabe, equivale a una inversión en el espacio. Por lo que acabamos de decir, esta operación no tiene nada que ver con la inversión en el plano, usada repetidamente por nosotros como ejemplo de representación conforme de plano sobre plano; pero la mayor parte de las conclusiones obtenidas en este caso pueden aplicarse ahora. En particular, la regla de transformación de vectores subsiste, y puede formularse así: *el vector-imagen de un vector infinitesimal dado se obtiene transformando éste como si fuese un segmento contenido en la superficie esférica-objeto. El de un vector finito se obtiene multiplicando su valor absoluto por la dilatación en el punto de aplicación, dándole la dirección de la tangente a la imagen de una curva objeto arbitraria que parte de dicho punto de aplicación.* El papel de movimiento libre lo desempeña el movimiento uniforme a lo largo de un círculo máximo, pues aunque considerado como movimiento absoluto no lo sea, la acción constante de la gravedad, única fuerza exterior que actúa, no necesita ser tenida en cuenta, o, mejor dicho, puede sustituirse por la condición de que el móvil debe permanecer dentro del espacio esférico de dos dimensiones, que consideramos actualmente como nuestro espacio-objeto. Efectivamente: suponiendo la Tierra inmóvil y su superficie esférica e infinitamente lisa, un punto material que descanse sobre ella, disparado por un impulso instantáneo horizontal que no exceda de cierta intensidad, no se separará en ningún momento de la misma y describirá con velocidad constante una circunferencia máxima; los mismos hechos pueden también describirse así: dentro de un espacio esférico de dos dimensiones, todo punto material libre describirá una geodésica, o sea un círculo máximo, con velocidad constante, que depende del impulso inicial. Como en realidad la Tierra no está inmóvil, la trayectoria de inercia para un observador que participa de su rotación no solamente no es un círculo máximo, sino que ni siquiera coincide con una geodésica de la superficie de nivel (alterada por la acción de la fuerza centrífuga), sino que resulta alterada por la fuerza aparente de Coriolis; pero para nuestro objeto esta fuerza debe ser tratada como una fuerza real actuando en el espacio objeto, y considerar como verdadera trayectoria libre la geodésica.

La interpretación del término inercial ofrece ciertas dificultades, que no existían en la representación de plano sobre plano, y que ahora vamos a aclarar. La red de meridianos y paralelos usada para fijar la posición de un punto sobre la superficie esférica no es geodésica, y lo peor es que no existe ninguna red geodésica válida para toda la esfera. De aquí resulta que la formulación de las leyes de la Mecánica por descomposición cartesiana de las fuerzas es imposible, y por consiguiente las ecuaciones (7) no sirven. El uso directo de coordenadas polares (o de su equivalente la red de meridianos y paralelos) no resulta adecuado para nuestro problema, porque la expresión de la trayectoria de inercia resulta demasiado complicada, con lo cual la deformación impuesta por el sistema de representación queda enmascarada. En cambio, el simbolismo vectorial salva tales escollos. Volveremos, pues, nuestra atención a las ecuaciones (8) y (9), que vamos a aplicar a la representación del movimiento libre sobre la esfera; es decir, al desplazamiento uniforme de un punto a lo largo de un círculo máximo. Usaremos las siguientes notaciones:

λ = longitud geográfica de un punto P.
φ = latitud geográfica de un punto.
β = azimut de un círculo máximo que pasa por P.
α = ángulo formado por el mismo con el ecuador.
r = radio de la esfera.
δ = dilatación en el punto P' imagen de P.
ρ = radio del círculo imagen.
v = velocidad (constante) sobre la esfera.

Se tendrá inmediatamente:

$$\rho = r \sec \alpha ;$$

o bien:

$$\rho = r \operatorname{cosec} \beta \sec \varphi .$$

Las ecuaciones (8) y (9) se reducen a la siguiente forma:

$$I_t = m\, v \,.\, V \frac{d\,\delta}{d\,S} = m\, v^2\, \delta \frac{d\,\delta}{d\,S}$$

$$I_r = m\, v^2 \frac{\delta^2}{\rho} ,$$

habiendo designado por I_t la componente tangencial del término inercial, y por I_r la componente radial del mismo, siendo S el arco de curva medido sobre la imagen. La dilatación en el punto P' valdrá, según (2) (introduciendo por comodidad la colatitud φ' en vez de la latitud):

$$\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\varphi'}{2} ;$$

de donde se deduce:

$$d\,\delta = \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi'}{2}\right) d\,\varphi' = 2\,\delta \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2}\, d\varphi' .$$

Por otra parte:

$$d\,S = \delta \,.\, r \sqrt{d\,\varphi'^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\,\lambda^2} ,$$

y de aquí:

$$I_t = \frac{2\, m\, v^2\, \delta}{r} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2}\, d\,\varphi'}{\sqrt{d\,\varphi^{2'} + \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\,\lambda^2}}$$

$$I_r = \frac{m\, v^2\, \delta^2}{r} \operatorname{sen} \beta \,.\, \operatorname{sen} \varphi' . \qquad [15]$$

El azimut β se puede eliminar teniendo en cuenta que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \varphi' \, d\lambda}{d\varphi'}, \qquad [16]$$

aunque preferimos más bien eliminar $d\lambda$ en I_t, quedando:

$$I_t = \frac{2\, m\, v^2\, \delta}{r} \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} \operatorname{cotg} \beta\,. \qquad [17]$$

Para el ecuador, poniendo $\varphi' = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ resulta, naturalmente:

$$I_t = 0$$

$$I_r = \frac{m\, v^2\, \delta^2}{r} = \frac{m\, V^2}{r};$$

o sea la fórmula conocida de la fuerza centrífuga. Lo mismo resulta para cualquier paralelo; es decir, siempre que sea $\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

En nuestras latitudes, poniendo por ejemplo $\varphi' = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$, resulta ($\delta = 0{,}58$):

$$I_t = 0{,}24 \cdot \frac{2\, m\, v^2}{r}$$

$$I_r = 0{,}50 \cdot \frac{m\, v^2}{r}$$

$$I = 0{,}55 \cdot \frac{m\, v^2}{r}\,.$$

Usando como valor aproximado del radio terrestre $r = 6 \cdot 10^8$ centímetros, y suponiendo una velocidad del viento de 30 metros por segundo ($3 \cdot 10^3$ cm/s.), que corresponde a un viento huracanado, el orden de magnitud del término inercial será de $8 \cdot 10^{-3}$ centímetros/s^2., comparable a las demás aceleraciones que se consideran ordinariamente en Meteorología.

Para el hemisferio S habrá que poner en lugar de φ'. $\dfrac{\pi}{2} + \varphi$; por tanto, I_t, I_r e I crecen rápidamente y tienden a infinito a medida que nos acercamos al polo S.

Todo esto se refiere, como es lógico, a una carta en escala natural. Se pasará a las cartas ordinarias, multiplicando la dilatación en cada punto por la escala ecuatorial, o bien sustituyendo r por E, siendo E el valor de dicha escala.

El ángulo que forma el término inercial con el gradiente es fácil de calcular, pues siendo conforme la representación, la imagen del gradiente es normal a la imagen de la isobara, y ésta coincide con la imagen de la trayectoria. Si llamamos ψ a dicho ángulo, se tendrá:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_t}{I_r} = 2 \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} . \qquad [18]$$

Resulta independiente de la latitud y sólo varía con el ángulo bajo el cual la trayectoria corta al meridiano. Para $\beta = 0$ resulta $\varphi = 90^\circ$; para $\beta = 45^\circ$, $\psi = 70^\circ\ 31'$, y para $\beta = 90^\circ$, $\psi = 0$.

IV. PROYECCION MERCATOR

La Carta de Mercátor es otra representación conforme. Lo mismo que en la proyección estereográfica la dilatación en un punto es sólo función de la latitud, a saber:

$$\delta = \sec \varphi .$$

Por consiguiente,

$$I_t = m\, v^2 \frac{d\ \delta}{d\ S} . \delta = \frac{m\, v^2\, \delta^2}{r} . \frac{\operatorname{tg} \varphi\ .\ d\ \varphi}{\sqrt{\delta^2\ d\ \varphi^2 + d\ \lambda^2}} ;$$

o bien introduciendo el azimut β:

$$I_t = \frac{m\, v^2\, \delta^2}{r} \operatorname{sen} \varphi \cos \beta . \qquad [19]$$

La ecuación de la ortodrómica, que representa la trayectoria de inercia, se puede escribir tomando un sistema de coordenadas cartesianas definido por las relaciones

$$x = r\, \lambda$$

$$y = r\, .\ \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) ,$$

que corresponden a la red de meridianos y paralelos de la Carta de Mercátor. Si llamamos λ_o a la longitud del punto donde el círculo máximo, cuya imagen buscamos, corta al ecuador, y α al ángulo que forma con el mismo, se tendrá:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha\ .\ \operatorname{sen} (\lambda - \lambda_o) . \qquad [20]$$

Eliminando φ y λ de esta ecuación por medio de las dos primeras, resulta:

$$\frac{e^{\frac{2y}{r}} - 1}{2\, e^{\frac{y}{r}}} = \operatorname{tg} \alpha\ .\ \operatorname{sen} \left(\frac{x - x_o}{r} \right) ;$$

o bien, despejando y:

$$y = r \cdot \ln \left[\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x - x_0}{r} \right) \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x - x_0}{r} \right) + 1} \right]. \quad [21]$$

Es una curva parecida a una sinusoide (en la proyección cilíndrica natural es exactamente una sinusoide), de la cual se aparta apenas un 1 por 100 como máximo, si se toma $\alpha = 45°$, y con la cual coincide en sus ceros y en sus máximos y mínimos. El cálculo directo de la curvatura sería engorroso; pero aprovechando el isogonismo de la representación y considerando que lo que nos interesa es calcular dicha curvatura en función de las coordenadas geográficas, mejor que en función de las coordenadas x, y, podemos acudir a la ecuación (16) y escribir:

$$y' = \frac{d\varphi}{\cos \varphi \cdot d\lambda},$$

y teniendo en cuenta (20):

$$y' = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \cos (\lambda - \lambda_0).$$

Por otra parte:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{r \cdot d\lambda} = -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \varphi \cdot [\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 (\lambda - \lambda_0) + 1].$$

En vez de α podemos introducir el azimut β en el punto (λ, φ):

$$y' = \operatorname{cotg} \beta$$

$$y'' = -\frac{1}{r} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}^2 \beta}.$$

El radio de curvatura ρ de la ortodrómica que pasa por el punto λ, φ formando con el meridiano el ángulo β, será pues, independiente de λ, como ya podía suponerse, y valdrá:

$$\rho = \frac{r}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \varphi}.$$

Por último, la componente transversal del término inercial será:

$$I_r = \frac{m v^2 \delta^2}{\rho} = \frac{m}{r} \operatorname{sen} \beta \cdot \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi^2}. \quad [22]$$

Su valor absoluto:

$$I = \sqrt{I_t^2 + I_r^2} = \frac{m v^2}{r} \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sqrt{1 + \delta^2}, \quad [23]$$

y el ángulo que forma con el radio de curvatura (o con el gradiente si el viento es geostrófico):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_t}{I_r} = \operatorname{cotg} \beta \, . \, \cos \varphi \, . \qquad [24]$$

Para la latitud de 45° y una trayectoria que forme también el mismo ángulo con el meridiano, con una velocidad de 30 metros por segundo, se encuentra:

$$\frac{I}{m} = 3{,}7 \, . \, 10^{-3} \ \mathrm{cm/s^2}$$

$$\psi = 35° \, 12' \, .$$

V. PROYECCION CONICA

En Meteorología se usa mucho la proyección cónica conforme de Lambert. Como nos interesa completar nuestro estudio con el de una representación no conforme, vamos a considerar brevemente la proyección cónica secante natural.

Las representaciones no conformes se caracterizan porque la dilatación δ no es una magnitud escalar, sino que tiene carácter tensorial, pues varía no sólo de un punto a otro, sino para un mismo punto, según la dirección del elemento lineal que se considera. Los valores principales (dilatación máxima y mínima) en la proyección cónica corresponden, respectivamente, a las direcciones del meridiano y del paralelo. Tomando estas dilataciones como ejes se construirá la elipse del tensor, cuyos radios centrales sirven de medida a la dilatación en las direcciones intermedias. El producto del tensor por un vector en el espacio de dos dimensiones se interpreta geométricamente como transformación de éste por semejanza y afinidad. Si llamamos δ_a, δ_b los valores principales del tensor (las direcciones a y b son perpendiculares entre sí) y v_a, v_b los componentes del vector, el producto es un nuevo vector definido por las igualdades.

$$V_a = v_a \, . \, \delta_a$$

$$V_b = v_b \, . \, \delta_b$$

Los vectores v y su transformado V forman el ángulo θ, tal que

$$\cos \theta = \frac{V_a \, . \, v_a + V_b \, . \, v_b}{v \, . \, V} = \frac{v_a^2 \, \delta_a + v_b^2 \, \delta_b}{v \, . \, V} \, , \qquad [25]$$

que se anula solamente para las dos direcciones principales.

Escribiendo V_b en la forma

$$V_b = v_b \cdot \delta_a \cdot \frac{\delta_b}{\delta_a},$$

se ve que la semejanza y la afinidad, que aplicadas sucesivamente transforman el vector v en el V, poseen, respectivamente, las razones δ_a y $\dfrac{\delta_b}{\delta_a}$.

En la proyección cónica secante las dilataciones principales tienen los siguientes valores:

$$\delta_\lambda = \frac{\cos(\omega - \varphi_1)}{\cos^2(\omega - \varphi)}$$

$$\delta_\varphi = \frac{\cos(\omega - \varphi_1)}{\cos(\omega - \varphi)}, \qquad [26]$$

habiendo designado por δ_λ la dilatación a lo largo del meridiano, y por δ_φ la misma a lo largo del paralelo, por ω la semiabertura del cono, y por φ_1 la latitud del paralelo inferior de intersección. La razón

$$\frac{\delta_\varphi}{\delta_\lambda} = \cos(\omega - \varphi) \qquad [2\ ]$$

demuestra que la elipse tensorial es siempre alargada en el sentido del meridiano, excepto para $\varphi = \omega$, que degenera en un círculo. Para los puntos situados en esta latitud, que corresponde al círculo de tangencia del cono paralelo al de proyección y tangente a la esfera, no hay, pues, deformación angular y la dilatación es isótropa. En sus inmediaciones la representación difiere poco de una representación conforme. De aquí se deduce la conveniencia de escoger el cono secante de tal manera, que la zona interesante queda situada en los alrededores de la latitud ω. Para España conviene, pues, usar un cono de semiabertura 40°, y para Europa, uno de 47°.

Vamos a estudiar ahora la modificación que sufren las fórmulas relativas al término inercial. Tendremos

$$\frac{d|V|}{dt} = \frac{d|V|}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} =$$

$$= \frac{\sqrt{v_\varphi^2\left(\delta_\varphi + d\,\delta_\varphi\right)^2 + v_\lambda^2\left(\delta_\lambda + d\,\delta_\lambda\right)^2} - \sqrt{v_\varphi^2\,\delta_\varphi^2 + v_\lambda^2\,\delta_\lambda^2}}{r\sqrt{\delta_\varphi^2\left(d\,\varphi\right)^2 + \delta_\lambda^2\cos^2\varphi\left(d\,\lambda\right)^2}} \cdot \sqrt{v_\varphi^2\,\delta_\varphi^2 + v_\lambda^2\,\delta_\lambda^2}.$$

Desarrollando el numerador y despreciando infinitésimos de orden superior, queda:

$$I_t = m \cdot \frac{d|V|}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{v_\varphi^2\,\delta_\varphi \cdot d\,\delta_\varphi + v_\lambda^2\,\delta_\lambda \cdot d\,\delta_\lambda}{\sqrt{\delta_\varphi^2\left(d\,\varphi\right)^2 + \delta_\lambda^2\cos^2\varphi\left(d\,\lambda\right)^2}},$$

y teniendo en cuenta (25):

$$d\,\delta\varphi = = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi)}{\cos^2(\omega - \varphi)}\,d\,\varphi$$

$$d\,\delta\lambda = \left[\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi)}{\cos^2(\omega - \varphi)} + \frac{\operatorname{tg}(\omega - \varphi)\cos(\omega - \varphi_1)}{\cos(\omega - \varphi)}\right] d\,\varphi\,;$$

de donde, recordando (20), e introduciendo el azimut β mediante la fórmula

$$\frac{d\,\lambda}{d\,\beta} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\varphi}\,,$$

resulta:

$$I_t = m\,\frac{v_\varphi \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi) + v_\lambda^2 \operatorname{sen}(\omega - \varphi_1)}{\cos(\omega - \varphi)\,.\,\sqrt{\cos^2(\omega - \varphi) + \operatorname{tg}^2\beta}}\,.$$

Para el cálculo de I_r habremos de partir de la fórmula (25), que escribiremos así:

$$\cos\theta = \frac{v_\varphi^2\,\delta_\varphi + v_\lambda^2\,\delta_\lambda}{v\sqrt{v_\varphi^2\,\delta_\varphi^2 + v_\lambda^2\,\delta_\lambda^2}} = \frac{\cos^2\beta\,.\,\cos(\omega - \varphi) + \operatorname{sen}^2\beta}{\sqrt{\cos^2\beta\,.\,\cos^2(\omega - \varphi) + \operatorname{sen}\beta}}\,,$$

y de la (20), que escribiremos así:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos\sigma}{\cos\varphi}\,.$$

Tendremos:

$$I_r = m\,V^2\,\frac{d\,(\beta - \theta)}{d\,S}\,,$$

y sucesivamente:

$$V^2 = v_\varphi^2\,\delta_\varphi^2 + r_\varphi^2\,\delta_\lambda^2 = \frac{\cos^2(\omega - \varphi_1)}{\cos^2(\omega - \varphi)}\,.\left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2(\omega - \varphi)}\right].\,v_\varphi^2$$

$$d\,\beta = \operatorname{tg}\beta\,.\,\operatorname{tg}\varphi\,.\,d\,\varphi$$

$$d\,\theta = \Bigg\{\frac{(1 - \operatorname{tg}^2\beta)\,[1 - \cos(\omega - \varphi)]\,.\,\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{sen}(\omega - \varphi)}{\cos(\omega - \varphi) + \operatorname{tg}^2\beta} +$$

$$+ \frac{[1 - \cos(\omega - \varphi)]\operatorname{sen}(\omega - \varphi)\,[\operatorname{tg}^2\beta \operatorname{sen}(\omega - \varphi)\operatorname{tg}\varphi - \cos(\omega - \varphi)]}{[\cos(\omega - \varphi) + \operatorname{tg}^2\beta]\,[\cos^2(\omega - \varphi) + \operatorname{tg}^2\beta]}\Bigg\}\operatorname{tg}\beta\,.\,d\,\varphi\,;$$

$$d\,S = r\,.\,\sqrt{\delta_\varphi^2 (d\varphi)^2 + \delta_\lambda^2 \cos^2\varphi\,(d\lambda)^2} = r\,\frac{\cos(\omega - \varphi_1)}{\cos(\omega - \varphi)}\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2(\omega - \varphi)}}\,.\,d\,\varphi\,;$$

de donde

$$I_r = \frac{m\, v_\varphi^2}{r} \cdot \frac{\cos(\omega - \varphi)}{\cos(\omega - \varphi_1)} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\cos^2(\omega - \varphi_1)}} \operatorname{tg} \beta \cdot \left[\operatorname{tg} \varphi - \left\{ \ldots\ldots \right\} \right]. \quad [29]$$

Para $\beta = 90^\circ$ se anula I_t, es decir, que el movimiento (no inercial) a lo largo de un paralelo es circular uniforme, mientras que para $\beta = 0$ se anula I_r, lo cual significa que el movimiento inercial a lo largo de un meridiano es rectilíneo, aunque no uniforme. Renunciamos a considerar el valor absoluto del término inercial y el ángulo que forma con el radio de curvatura de la trayectoria, porque su escasa utilidad práctica resulta desproporcionada en comparación con la gran complicación de las fórmulas.

Procedimientos semejantes a los aquí expuestos son aplicables a cualesquiera otros tipos de representación cartográfica. Todo se reduce en cada caso a expresar el tensor de las dilataciones en función de las coordenadas geográficas del punto; combinado este tensor con la ecuación de la ortodrómica, es siempre posible obtener las dos componentes: tangencial y radial del término inercial. Las coordenadas geográficas son coordenadas curvilíneas para el plano imagen, que ni siquiera son geodésicas. La ecuación general de la Dinámica para dicho plano imagen se obtiene expresando todas las fuerzas que actúan sobre una partícula en función de las coordenadas geográficas y sus derivados, multiplicándolas por el tensor de sus dilataciones, sumándoles el término inercial y aplicando el principio de D'Alambert.

Como ya hemos hecho notar antes, el término inercial, fuerza ficticia engendrada por el artificio de la representación, es del mismo orden de magnitud que las fuerzas reales. ¿Cómo se explica, entonces, que nadie lo tenga nunca en cuenta y todos los meteorólogos utilicen en Meteorología sinóptica las ecuaciones de la Dinámica real sin modificar? El motivo es que miramos la imagen, pero pensamos en el objeto; vemos una curva en la Carta y decimos que es una recta; vemos distancias notoriamente desiguales y decimos que son iguales porque sabemos que los espacios reales que representan lo son. En una palabra, aplicamos inconscientemente a la Carta un sistema de geometría, que al principio hemos denominado seudoesférico, mediante el cual la dilatación es constante en toda la Carta porque tomamos por unidad en cada punto y para cada dirección el valor de la dilatación correspondiente; entonces el término inercial se anula. Recordemos que siendo la Carta un plano, el sistema geométrico natural que les es aplicable es el euclidiano, y el sistema de coordenadas más cómodo el cartesiano rectangular, pero que además se pueden utilizar coordenadas culvilíneas, en particular los haces de curvas que son imágenes respectivamente de las redes de meridianos y de paralelos de la esfera; y si se da el nombre de geodésicas a las curvas imagen de las geodésicas verdaderas (ortodrómicas en Cartografía) y se toma como unidad de medida variable la dilatación, entonces el sistema de geometría válido en la Carta se identifica con el sistema válido en la superficie representada (en nuestro caso el esférico), y toda la dinámica del punto imagen con la Dinámica del punto objeto, es decir, con la Dinámica ordinaria. Repetimos que esto es lo que se hace de ordinario, aun inconscientemente. El procedimiento corriente de la Meteorología sinóptica consiste en investigar los movimientos reales del aire y servirse luego de una imagen plana para hacer sensibles los resultados. El que nosotros hemos seguido aquí consiste en representar primero los movimientos sobre el plano y luego investigar, no las leyes que los rigen, sino las que rigen los de la imagen. En vez de decir que un centro ciclónico se desplaza con una velocidad de 60 kilómetros por hora, nosotros diremos que la imagen de dicho centro sobre nuestra Carta se desplaza con una velocidad de seis milímetros por hora, si la escala utilizada es de 1 : 1.000.000 y prescindimos de la deformación; y en vez de buscar las fuerzas capaces de dar razón de aquel desplazamiento real, buscamos las que podrían darla de éste, si cada punto móvil fuese soporte de una masa igual a la que soporta su punto objeto correspondiente.

GRÁFICAS VIRGEN DE LORETO